Учреждение образования

«Белорусский государственный технологический университет»

**Кафедра информационных систем и технологий**

**Лабораторная работа №3**

**Тема «**Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ**»**

Вариант 8

Выполнила:

Студентка 2 курса 7 группы ФИТ

Курносенко Софья Андреевна

Проверил:

Барковский Евгений Валерьевич

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** освоить общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решить задачу о коммивояжере данным методом, сравнить полученное решение задачи с комбинаторным методом перестановок.

**Задание 1.** Сформулировать условие задачи коммивояжера с параметром. Для этого:

* принять элементы матрицы расстояний равными:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 2 \* n | 21 + n |  | n |
| **2** | n |  | 15 + n | 68 - n | 84 - n |
| **3** | 2 + n | 3 \* n |  | 86 | 49 + n |
| **4** | 17 + n | 58 - n | 4 \* n |  | 3 \* n |
| **5** | 93 - n | 66 + n | 52 | 13 + n |  |

где *n* – номер варианта;

**Условие:**

Найти оптимальный маршрут для коммивояжера, если известно, что кол-во городов равно 5, а расстояние между городами задается следующей таблицей d:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 16 | 29 |  | 8 |
| **2** | 8 |  | 23 | 60 | 76 |
| **3** | 10 | 24 |  | 86 | 57 |
| **4** | 25 | 50 | 32 |  | 24 |
| **5** | 85 | 74 | 52 | 21 |  |

По диагонали таблицы установлены символы, обозначающие бесконечность, что свидетельствует о невозможности такого передвижения коммивояжера.

Задачу следует решить с использованием метода ветвей и границ.

**Задание 2.** Решить сформулированную задачу методом ветвей и границ.

**Примечание**: отчет по лабораторной работе должен быть выполнен на листах формата A4 с помощью редактора MS Word (Times New Roman 14) и должен содержать:

* титульный лист (Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ, фамилия, курс, группа);
* условие (матрица расстояний);
* ход решения (граф решения, обоснование ветвления и вычисление границ **для всех этапов**);
* решение (если их несколько, то все решения).

**Ход решения.**

**Совершим операцию приведения таблицы по строке.** Для этого выпишем наименьшие значения строк в дополнительный столбец справа, эти наименьшие значения называются **константами приведения**.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |  |
| **1** |  | 16 | 29 |  | 8 | 8 |
| **2** | 8 |  | 23 | 60 | 76 | 8 |
| **3** | 10 | 24 |  | 86 | 57 | 10 |
| **4** | 25 | 50 | 32 |  | 24 | 24 |
| **5** | 85 | 74 | 52 | 21 |  | 21 |

Сумма констант приведения = 8+8+10+24+21 = 71.

**Производим редукцию строк** – из каждого элемента в строке вычитаем соответствующее значение найденного минимума.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 8 | 21 |  | 0 |
| **2** | 0 |  | 15 | 52 | 68 |
| **3** | 0 | 14 |  | 76 | 47 |
| **4** | 1 | 26 | 8 |  | 0 |
| **5** | 64 | 53 | 31 | 0 |  |

**Совершим операцию приведения таблицы по столбцу.** Для этого выпишем наименьшие значения столбцов в дополнительную строку снизу, эти наименьшие значения называются **константами приведения**.

Операцию производим на получившейся в предыдущем пункте таблице.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 8 | 21 |  | 0 |
| **2** | 0 |  | 15 | 52 | 68 |
| **3** | 0 | 14 |  | 76 | 47 |
| **4** | 1 | 26 | 8 |  | 0 |
| **5** | 64 | 53 | 31 | 0 |  |
|  | 0 | 8 | 8 | 0 | 0 |

Сумма констант приведения = 8+8 = 16.

**Производим редукцию столбцов** – из каждого элемента в столбце вычитаем соответствующее значение найденного минимума.

Получаем **полностью приведенную таблицу**.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 0 | 13 |  | 0 |
| **2** | 0 |  | 7 | 52 | 68 |
| **3** | 0 | 6 |  | 76 | 47 |
| **4** | 1 | 18 | 0 |  | 0 |
| **5** | 64 | 45 | 23 | 0 |  |

Общая сумма констант приведения: **71 + 16 = 87**. Эту величину можно принять в качестве нижней границы длины кратчайшего кольцевого маршрута, проходящего через все города.

φ = 71 + 16 = 87

Далее будем исследовать, какая дуга сильнее повлияет на нижнюю границу длины дополнительных кольцевых маршрутов.

Анализировать, прежде всего, следует **дуги, имеющие нулевой вес**, так как только их удаление может повлиять на нижнюю границу. *Удаление дуги может быть промоделировано установкой ее веса равного бесконечности.*

Для этого для каждой нулевой клетки получившейся преобразованной матрицы находим «оценку».

**Алгоритм нахождения оценки.**

Например, найдем оценку дуги (1, 2), так как на пересечении 1 строки и 2 столбца мы видим 0 (т.е. дуга имеет нулевой вес). Значение данной дуги заменяем на ∞ и выписываем константы приведения по строкам и столбцам.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |  |
| **1** |  | **∞** | 13 |  | 0 | 0 |
| **2** | 0 |  | 7 | 52 | 68 | 0 |
| **3** | 0 | 6 |  | 76 | 47 | 0 |
| **4** | 1 | 18 | 0 |  | 0 | 0 |
| **5** | 64 | 45 | 23 | 0 |  | 0 |
|  | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |  |

Вычисляем сумму получившихся наименьших значений (1, 2) = 6. То есть оценка дуги (1, 2) равна 6.

Найдем оценку дуги (1, 5).

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |  |
| **1** |  | 0 | 13 |  | **∞** | 0 |
| **2** | 0 |  | 7 | 52 | 68 | 0 |
| **3** | 0 | 6 |  | 76 | 47 | 0 |
| **4** | 1 | 18 | 0 |  | 0 | 0 |
| **5** | 64 | 45 | 23 | 0 |  | 0 |
|  | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |  |

(1, 5) = 0

Следуя этому алгоритму, находим остальные оценки.

(2, 1) = 7

(3, 1) = 6

(4, 3) = 7

(4, 5) = 0

(5, 4) = 52+23 = 75

Вычисления показывают, что удаление дуги **(5, 4)** позволяет получить самую большую сумму констант приведения (75), а значит, выбор этой дуги для ветвления ***даст самое меньшее увеличение нижней границы длины кольцевых маршрутов***.

Вычеркиваем из таблицы дугу с наибольшей оценкой, то есть (5, 4) в нашем случае. Получаем таблицу:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **1** |  | 0 | 13 | 0 |
| **2** | 0 |  | 7 | 68 |
| **3** | 0 | 6 |  | 47 |
| **4** | 1 | 18 | 0 |  |

Теперь необходимо привести данную таблицу. Выписываем константы приведения для строк и столбцов.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **5** |  |
| **1** |  | 0 | 13 | 0 | 0 |
| **2** | 0 |  | 7 | 68 | 0 |
| **3** | 0 | 6 |  | 47 | 0 |
| **4** | 1 | 18 | 0 |  | 0 |
|  | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

Сумма констант = 0.

Значит таблица и так приведена.

Изображаем фрагмент графа T, имеющий две ветви. Нижняя граница дочерних узлов, вычисляется как сумма, нижней границы родительского узла и суммы констант приведения соответствующей таблицы.

φ = 71 + 16 = 87

φ = 87+75 = 162

φ = 87+0 = 87

Согласно алгоритму дальнейший поиск решения следует осуществлять во множестве ***R***(5, 4), поскольку именно здесь на текущий момент нижняя граница является меньшей.

Для получившейся приведенной таблицы находим оценки дуг:

(1, 2) = 6

(1, 5) = 47

(2, 1) = 7

(3, 1) = 6

(4, 3) = 1+7 = 8

Вычисления показывают, что удаления дуги **(1, 5)** позволяет получить самую большую константу приведения (47).

Вычеркиваем из таблицы дугу (1, 5):

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** |
| **2** | 0 |  | 7 |
| **3** | 0 | 6 |  |
| **4** | 1 | 18 | 0 |

Приводим таблицу. Сумма констант приведения = 6.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** |
| **2** | 0 |  | 7 |
| **3** | 0 | 0 |  |
| **4** | 1 | 12 | 0 |

φ = 71 + 16 = 87

φ = 87+75 = 162

φ = 87+0 = 87

φ = 87+6 = 93

φ = 162+47 = 209

Находим оценки дуг получившейся таблицы:

(2, 1) = 7

(3, 1) = 0

(3, 2) = 12

(4, 3) = 19

Вычисления показывают, что удаления дуги **(4, 3)** позволяет получить самую большую константу приведения (19).

Вычеркиваем из таблицы дугу (4, 3):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** |
| **2** | 0 |  |
| **3** | 0 | 0 |

Таблица уже приведена, и сумма констант приведения = 0.

φ = 71 + 16 = 87

φ = 87+75 = 162

φ = 87+0 = 87

φ = 87+6 = 93

φ = 87+47 = 134

φ = 93+0 = 93

φ = 93+19 = 112

(2,1) = 0+=

(3,1) = 0+0 = 0

(3,2) = 0+=

Анализ таблицы позволяет выявить два последних звена кольцевого маршрута: (2, 1) и (3, 2).

*Окончательный вид графа* ***T****.*

φ = 71 + 16 = 87

φ = 87+75 = 162

φ = 87+0 = 87

φ = 87+6 = 93

φ = 87+47 = 134

φ = 93+0 = 93

φ = 93+19 = 112

R2,1

R3, 2

В итоге удалены дуги: (5,4), (1,5), (4,3), (2,1), (3,2).

Для получения окончательного решения следует расставить выбранные дуги в правильном порядке (начинаем с пункта 1, заканчиваем в нем же): (1,5), (5,4), (4,3), (3,2), (2,1).

Ему соответствует следующий маршрут: 1 → 5 → 4 → 3 → 2 → 1.

**Длина оптимального маршрута: 93 = 8+21+32+24+8 .**

**Задание 3.** Проверить полученное решение при помощи генератора перестановок (см. лаб. 2, задание 5.1.) и включить копию экрана с решением в отчет.

